

用于线性噪声时变凸二次规划的归零神经网络

李建锋^{1,2}, 刘哲宇^{1,2}, 荣洋², 李展³, 廖柏林², 屈林曦², 刘志杰², 林琨煌²

(1. 吉首大学数学与统计学院, 湖南 吉首 416000; 2. 吉首大学计算机科学与工程学院, 湖南 吉首 416000;
3. 斯旺西大学计算机科学学院, 斯旺西 SA28PP)

摘要: 针对线性噪声可能会对现有的归零神经网络 (ZNN) 模型求解时变二次规划 (TVQP) 问题产生负面影响, 从而导致模型收敛缓慢、准确率降低的问题, 提出了一种双重积分增强 ZNN (DIEZNN) 模型。为了解决线性噪声的干扰, 在 ZNN 原有公式基础上引入双重积分, 设计了一个激活函数去除线性噪声的影响。理论分析证实了 DIEZNN 模型具有收敛性和良好的噪声抑制能力。实验结果表明, 与传统的梯度神经网络和其他变量 ZNN 模型相比, DIEZNN 模型收敛更快、精度更高, 并且能够有效地解决线性噪声的影响。

关键词: 归零神经网络; 时变二次规划; 线性约束; 噪声干扰

中图分类号: TP183

文献标志码: A

DOI: 10.11959/j.issn.1000-436x.2023075

Zeroing neural network for time-varying convex quadratic programming with linear noise

LI Jianfeng^{1,2}, LIU Zheyu^{1,2}, RONG Yang², LI Zhan³, LIAO Bolin², QU Linxi², LIU Zhijie², LIN Kunhuang²

1. Department of Mathematics and Statistics, Jishou University, Jishou 416000, China

2. Department of Computer Science and Engineering, Jishou University, Jishou 416000, China

3. Department of Computer Science, Swansea University, Swansea SA28PP, UK

Abstract: Aiming at the problem that linear time-varying noise may have a negative impact on the existing zeroing neural network model to solve TVQP problem, resulting in slow convergence and low accuracy of the model, a double integral enhancement zeroing neural network was proposed. To solve the problem of linear time-varying interference of the noise, the double integral was introduced based on the original ZNN design formula, and a activation function was designed to eliminate the effects of linear time-varying noise. Theoretical analysis proved that the DIEZNN model had convergence and good noise suppression ability. The experimental results show that compared with the traditional gradient neural network and other variable ZNN models, the proposed DIEZNN model has faster convergence and higher accuracy, and can effectively solve the linear time-varying noise.

Keywords: zeroing neural network, time-varying quadratic programming, linear constraint, noise disturbance

0 引言

二次规划 (QP, quadratic programming) 问题在

科学计算和工程应用的许多领域得到了广泛应用, 如图像处理^[1]、投资组合^[2]、调度控制器设计^[3]、机器人运动规划^[4]和最优控制器设计^[5]等。QP 问题

收稿日期: 2022-12-25; 修回日期: 2023-03-22

通信作者: 刘哲宇, liuzheyu@stu.jsu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.61962023, No.62066015); 湖南省自然科学基金资助项目 (No.2020JJ4511); 湖南省教育局研究基金资助项目 (No.20A396); 吉首大学科学研究基金资助项目 (No.Jdy20063)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (No.61962023, No.62066015), Hunan Natural Science Foundation (No.2020JJ4511), The Research Foundation of Education Bureau of Hunan Province (No.20A396), The Scientific Research Foundation of Jishou University (No.Jdy20063)

是一个基本问题，其他非线性规划问题都可以由QP公式近似转化得到。目前，求解QP问题的大多数方法和模型都是基于QP公式中的系数是静态的而不是时变的假设。已有研究人员利用数值方法串行处理的方式处理这类非静态QP问题^[6]，并开发出有效的模型和方法。例如，Zhang等^[6]提出了一种针对线性等式和不等式约束的静态凸QP问题的对偶神经网络；Hu等^[7]提出了一种求解单调线性变分不等式和QP问题的通用投影神经网络。

上述代表性工作在处理静态QP问题方面取得了很大的成功。然而，科学和工程领域的QP问题大多是非静态的或时变的，因此神经网络求解非静态QP问题的效果可能不如预期。为了应对这种情况，Li等^[8]提出了一个预定义时间收敛归零神经网络(PTCZNN)。Zhang等^[9-10]和Boyd等^[11]针对在线时变二次优化提出了一种通用的递归神经网络——归零神经网络(ZNN, zeroing neural network)。上述神经网络求解器在无噪声或目标函数和模型噪声基本可以忽略的情况下仍然有效。但在现实中，大多数QP问题的目标函数和约束条件容易受到模型噪声和测量噪声的干扰，如机械臂运动规划在硬件实现过程中容易产生模型误差和测量误差。此外，恶劣的环境干扰因素和其他外界因素也是复杂噪声的来源。因此，确保一个准确的解是极其重要的。原始归零神经网络(OZNN, original zeroing neural network)模型最初不是为同时进行噪声抑制的TVQP问题的在线求解而设计的，所以无法在噪声干扰下计算出准确的解。为了提高抗噪声能力，便于解决噪声干扰下的TVQP问题，还需要开发新的方法。据本文调研，针对时变噪声干扰下具有时变不等式约束的特定TVQP问题，几乎没有相关的研究。

本文的主要贡献在于设计了一种双重积分增强ZNN(DIEZNN, double integral enhancement zeroing neural network)模型来解决这类具有不等式约束的噪声影响的TVQP问题，提出了一种新的向量值误差处理方法，证明了所提出的DIEZNN模型的全局收敛性和鲁棒性，以确保能达到准确的最优解。

1 问题表述和初步准备

具有线性时变不等式约束的时变凸QP问题为

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \frac{\mathbf{x}^T(t)\mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t)}{2} + \mathbf{p}^T(t)\mathbf{x}(t) \\ & \text{s.t.} \quad \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{d}(t) \\ & \quad \quad \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \leq \mathbf{b}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

其中，时间 $t \in [0, +\infty)$ ，向量 $\mathbf{x}(t) \in R^n$ 是未知变量，需要通过模型修正；海赛矩阵 $\mathbf{H}(t) \in R^{n \times n}$ ，系数向量 $\mathbf{p}(t) \in R^n$ ，系数矩阵 $\mathbf{C}(t) \in R^{m \times n}$ ，系数矩阵 $\mathbf{A}(t) \in R^{p \times n}$ ，系数向量 $\mathbf{d}(t) \in R^m$ ，系数向量 $\mathbf{b}(t) \in R^p$ 随时间平稳变化。此外，假设系数矩阵和系数向量及其时间导数已知或可以准确估计。为确保解的唯一性，式(1)必须是凸的^[12-13]， $\mathbf{H}(t)$ 在每个时刻为正确定性。对于包含等式和不等式约束的式(1)，通过引入一个非负松弛变量，可以得到仅包含等式的TVQP问题为

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \frac{\mathbf{x}^T(t)\mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t)}{2} + \mathbf{p}^T(t)\mathbf{x}(t) \\ & \text{s.t.} \quad \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{d}(t) \\ & \quad \quad \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\theta}^2(t) = \mathbf{b}(t) \end{aligned} \quad (2)$$

其中， $\boldsymbol{\theta}^2(t) \in R^p$ 是未知变量，需要获取；当 $\boldsymbol{\theta}^2(t) \notin R^p$ 时，就被定义为 $\boldsymbol{\theta}^2(t) = \boldsymbol{\theta}(t) \circ \boldsymbol{\theta}(t)$ 。

此外，噪声扰动可能会中断上述系数。因此，受时变噪声干扰的TVQP问题为

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \frac{\mathbf{x}^T(t)[\mathbf{H}(t) + \mu(\mathbf{H}(t))]\mathbf{x}(t)}{2} + \\ & \quad \quad \quad \left[\mathbf{p}^T(t) + \mu(\mathbf{p}(t)) \right] \mathbf{x}(t) \\ & \text{s.t.} \quad \left[\mathbf{C}(t) + \mu(\mathbf{C}(t)) \right] \mathbf{x}(t) = \mathbf{d}(t) + \mu(\mathbf{d}(t)) \\ & \quad \quad \left[\mathbf{A}(t) + \mu(\mathbf{A}(t)) \right] \mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\theta}^2(t) = \mathbf{b}(t) + \mu(\mathbf{b}(t)) \end{aligned} \quad (3)$$

其中， $\mu(\mathbf{H}(t))$ 、 $\mu(\mathbf{p}(t))$ 、 $\mu(\mathbf{C}(t))$ 、 $\mu(\mathbf{A}(t))$ 、 $\mu(\mathbf{d}(t))$ 和 $\mu(\mathbf{b}(t))$ 表示目标函数与线性约束之间的线性噪声。施加的线性噪声不会影响海赛矩阵 $\mathbf{H}(t)$ 的可逆性，本文问题式(3)中考虑的线性噪声不会由于保证系数矩阵 $\mathbf{H}(t)$ 的可逆性而破坏其凸性。

由于式(2)没有不等式约束，可以得到拉格朗日函数，表示为

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}_1(t), \boldsymbol{\lambda}_2(t), \boldsymbol{\theta}(t), t) = & \frac{\mathbf{x}^T(t)\mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t)}{2} + \\ & \mathbf{p}^T(t)\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\lambda}_1^T(t)(\mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{d}(t)) + \boldsymbol{\lambda}_2^T(t) \cdot \\ & (\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{b}(t) + \boldsymbol{\theta}^2(t)) \end{aligned}$$

其中， $\boldsymbol{\lambda}_1(t) \in R^m$ ， $\boldsymbol{\lambda}_2(t) \in R^p$ 表示拉格朗日仿真向量。

通过使用KKT(Karush-Kuhn-Tucker)条件，

可得到方程

$$\begin{cases} \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{p}(t) + \mathbf{C}^T(t)\boldsymbol{\lambda}_1(t) + \mathbf{A}^T(t)\boldsymbol{\lambda}_2(t) = 0 \\ \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{d}(t) = 0 \\ \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{b}(t) + \boldsymbol{\theta}^2(t) = 0 \\ \boldsymbol{\lambda}_2(t) \circ \boldsymbol{\theta}(t) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

根据文献[1,12,14]可知, 如果有 3 个向量 $\boldsymbol{\lambda}_1(t) \in \mathbf{R}^m$ 、 $\boldsymbol{\lambda}_2(t) \in \mathbf{R}^p$ 和 $\boldsymbol{\theta}(t) \in \mathbf{R}^p$, 将向量 $\mathbf{y}(t) = [\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}_1(t), \boldsymbol{\lambda}_2(t), \boldsymbol{\theta}(t)]^T \in \mathbf{R}^{m+n+2p}$ 代入式(4), 则向量 $\mathbf{y}(t)$ 是式(2)的最优解。此外, 方程可以改写为

$$f(\mathbf{y}(t), t) = 0 \quad (5)$$

其中, 映射函数 $f(\cdot)$ 表示式(4)的左侧。其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{p}(t) + \mathbf{C}^T(t)\boldsymbol{\lambda}_1(t) + \mathbf{A}^T(t)\boldsymbol{\lambda}_2(t) \\ \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{d}(t) \\ \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{b}(t) + \boldsymbol{\theta}^2(t) \\ \boldsymbol{\lambda}_2(t) \circ \boldsymbol{\theta}(t) \end{bmatrix}$$

本文的目的是提出一种具有双重积分增强的归零神经网络, 得到一个满足上述矩阵为 $\mathbf{0}$ 的向量, 然后求解非线性方程式(4)和 TVQP 问题式(2)。

2 神经网络求解和比较

本节引入了一种新的归零神经网络, 给出了用于对比的原始张神经网络、梯度神经网络 (GNN) 和积分增强神经网络模型, 来求解具有不等式约束的线性噪声影响的式(3)。DIEZNN 模型采用了一种新的误差处理方法, 其中包括一个双重积分增强环。

2.1 原始张神经网络

为了在噪声条件下对 TVQP 问题进行在线优化, 一个典型的方法是通过神经网络模型将式(5)归零, OZNN 模型为^[14]

$$\mathcal{F}(\mathbf{y}(t), t)\dot{\mathbf{y}}(t) = -\gamma\psi(f(\mathbf{y}(t), t)) - \frac{\partial f(\mathbf{y}(t), t)}{\partial t} \quad (6)$$

2.2 梯度神经网络

梯度神经网络模型利用标量值的能量函数, 试图通过让梯度为零。GNN 模型本质上是在目标函数和约束条件中出现常系数的情况下提出的, 并可以扩展到时变情况下。

$$\mathbf{P}(t)\dot{\mathbf{y}}(t) = -\left[\frac{\partial f(\mathbf{y}(t), t)}{\partial t} + l_1 f(\mathbf{y}(t), t) + l_2 \int_0^t f(\mathbf{y}(t), t) dt + l_3 \int_0^t \int_0^t f(\mathbf{y}(t), t) dt dt \right] \quad (12)$$

此外, 根据式(11), 第 i 个和第 j 个神经元的动力学方程可以表示为

线性 GNN 模型为^[15]

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = -\gamma \mathcal{F}(\mathbf{y}(t), t)^T (f(\mathbf{y}(t), t))$$

一般非线性 GNN 模型为

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = -\gamma \mathcal{F}(\mathbf{y}(t), t)^T \Phi(f(\mathbf{y}(t), t)) \quad (7)$$

其中, $\Phi(\cdot)$ 为奇数和单调递增的函数数组。

2.3 积分增强张神经网络

式(6)可以很好地处理时变 QP 问题, 但本文问题式(3)中的目标函数和约束可以包含可能影响模型系数的外部噪声。在这种情况下, OZNN 模型的求解精度会受到噪声的影响。

IEZNN 的隐式神经网络模型为

$$\mathcal{F}(\mathbf{y}(t), t)\dot{\mathbf{y}}(t) = -\left[\frac{\partial f(\mathbf{y}(t), t)}{\partial t} + l_1 f(\mathbf{y}(t), t) + l_2 \int_0^t f(\mathbf{y}(t), t) dt \right] \quad (8)$$

2.4 双重积分增强张神经网络

为了在噪声条件下对上述 TVQP 问题进行在线优化, 一个典型的方法是通过神经网络模型使式(5)的解为零。因此, 本文可以使用式(5)来监测式(3)的解决过程。定义误差函数 $E(t)$ 为

$$E(t) = f(\mathbf{y}(t), t) \quad (9)$$

此外, 为了迫使误差函数 $E(t)$ 对时间 t 的导数在有限的时间内收敛于零, 采用 ZNN 设计公式如下。

$$\dot{E}(t) = -\gamma\psi(f(\mathbf{y}(t), t)) \quad (10)$$

其中, $\gamma > 0$ 为缩放收敛速度的设计参数, $\psi(\cdot)$ 为数组形式的激活函数。

在现实世界中, 噪声通常是复杂和变化的, 如线性噪声。面对这种情况, 式(8)在解决 TVQP 问题方面的性能可能并不理想。因此, 本文提出了一种基于双重积分的误差函数来提高 ZNN 的模型对噪声的性能, 表示为

$$\dot{E}(t) = -l_1 E(t) - l_2 \int_0^t E(t) dt - l_3 \int_0^t \int_0^t E(t) dt dt \quad (11)$$

其中, $l_1 = 3K_0$ 、 $l_2 = 3K_0^2$ 、 $l_3 = 3K_0^3$ ($K_0 < 0$) 表示控制 DIEZNN 模型收敛速度的指标。

将误差函数 $E(t)$ 代入式(9), 可以得到 DIEZNN 的隐式神经网络模型为

$$\dot{y}_{ij} = -\left[\sum_{i=1}^m a_{ij} \dot{y}_{il} + l_1 \sum_{i=1}^m a_{ij} y_{il} + l_2 \int_0^t \sum_{i=1}^m b_{ij} y_{il} + l_3 \int_0^t \int_0^t \sum_{i=1}^m c_{ij} y_{il} \right]$$

其中, a_{ij} 、 b_{ij} 、 c_{ij} 分别表示矩阵 $I - P(t)$ 、 $P(t)$ 、 $\dot{P}(t)$ 中的对应元素。

为了进一步研究式(9)在未知噪声污染条件下的鲁棒性, 本文给出方程

$$P(t)\dot{y}(t) = -\left[\frac{\partial f(y(t), t)}{\partial t} + l_1 f(y(t), t) + l_2 \int_0^t f(y(t), t) dt + l_3 \int_0^t \int_0^t (f(y(t), t) dt) dt\right] + \text{Noise}(t) \quad (13)$$

其中, 噪声 $\text{Noise}(t) \in \mathbf{Z}^{n \times m}$ 表示矩阵形式的噪声, 如线性噪声。

值得注意的是, 本文问题式(3)中考虑的线性噪声可以保证系数矩阵的可逆性, 不会破坏其凸性。本文提出的式(12)可以有效解决线性噪声干扰下的 TVQP 问题, 且不需要对噪声进行预处理。

3 DIEZNN 收敛性分析

本节提出了 2 个定理来讨论 DIEZNN 模型(式(12))的全局收敛性, 并给出了相应的证明, 这 2 个定理分别对应无噪声和线性噪声。此外, 对于矩阵形式的线性噪声, 残差 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|E(t)\|_2$ 可以任意小。

3.1 无噪声收敛性

本节利用定理 1 来研究 DIEZNN 模型(式(12))在无噪声干扰情况下的收敛性。

定理 1 DIEZNN 模型全局收敛于 TVQP 问题的理论解, 即式(12)的解向量 $x(t)$ 最小化的理论值满足约束。

证明 对 $E(t)$ 的两边取二阶导数得到

$$\ddot{E}(t) = -l_1 \ddot{E}(t) - l_2 \dot{E}(t) - l_3 E(t)$$

进行拉普拉斯变换得到

$$\begin{aligned} k^3 E(t)_k - k^2 E(t)_0 - k \dot{E}(t)_0 - \ddot{E}(t)_0 = \\ -l_1 (k^2 E(t)_k - k E(t)_0 - \dot{E}(t)_0) - \\ l_2 (k E(t)_k - E(t)_0) - l_3 E(t)_k \end{aligned}$$

进一步得到

$$E(t)_k = \frac{k^2 E(t)_0 + k \dot{E}(t)_0 + \ddot{E}(t)_0 + l_1 k E(t)_0 + l_1 k \dot{E}(t)_0 + l_2 E(t)_0}{k^3 + l_1 k^2 + l_2 k + l_3}$$

令 $h = k^2 E(t)_0 + k E(t)_0 + E(t)_0 + l_1 k E(t)_0 + l_1 k \dot{E}(t)_0 + l_2 E(t)_0$, 可以得到

$$E(t)_k = \frac{h}{k^3 + 3k_0 k^2 + 3k_0^2 k + k_0^3}$$

最后得到

$$E(t)_k = \frac{h}{(k + k_0)^3}$$

因为 s_0 的实部在左半平面上, 所以 $E(t)_k$ 是稳定的, 使用均值定理可得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = \lim_{k \rightarrow 0} k E(t)_k = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{sh}{(k + k_0)^3} = 0$$

3.2 线性噪声收敛性

本节利用定理 2 来研究 DIEZNN 模型(式(12))在线性噪声扰动下的收敛情况。

定理 2 DIEZNN 模全局收敛于线性时间间隔噪声下 TVQP 问题的理论解, 即式(12)的解向量 $x(t)$ 的理论值, 该值使目标方程最小并满足约束。

证明 对 $\dot{E}(t) = -l_1 E(t) - l_2 \int_0^t E(t) dt - l_3 \int_0^t \int_0^t (E(t) dt) dt + n(t)$ 取二阶导数, 即 $\ddot{E}(t) = -l_1 \ddot{E}(t) - l_2 \dot{E}(t) - l_3 E(t) + \ddot{n}(t)$, 由于 $n(t) = S_0 + S_1 t$, 因此 $\ddot{n}(t) = 0$, 本文可以获得。 $E(t) = -l_1 \ddot{E}(t) - l_2 \dot{E}(t) - l_3 E(t)$, 取 a 的拉普拉斯变换线性方程

$$\begin{aligned} k^3 E(t)_k - k^2 E(t)_0 - k \dot{E}(t)_0 - \ddot{E}(t)_0 = - \\ l_2 (k E(t)_k - E(t)_0) - l_3 E(t)_k \end{aligned}$$

进一步得到

$$E(t)_k = \frac{k^2 E(t)_0 + k \dot{E}(t)_0 + \ddot{E}(t)_0 + l_1 k E(t)_0 + l_1 k \dot{E}(t)_0 + l_2 E(t)_0}{k^3 + l_1 k^2 + l_2 k + l_3}$$

令 $h = s^2 E(t)_0 + k \dot{E}(t)_0 + \ddot{E}(t)_0 + l_1 k E(t)_0 + l_1 k \dot{E}(t)_0 + l_2 E(t)_0$, 可以得到

$$E(t)_s = \frac{h}{s^3 + 3s_0 s^2 + 3s_0^2 s + s_0^3}$$

最后得到

$$E(t)_s = \frac{h}{(s + s_0)^3}$$

因为 s_0 的实部在左半平面上, 所以 $E(t)_s$ 是稳定的, 使用均值定理可得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = \lim_{s \rightarrow 0} E(t)_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sh}{(s + s_0)^3} = 0$$

4 实验与分析

本节使用 OZNN 模型(式(6))、GNN 模型(式(7))、IEZNN 模型(式(8))和 DIEZNN 模型(式(12))来解决噪声扰动下受等式和不等式约束的 TVQP 问题(式(2)), 进一步证明了式(12)的全局收敛性。通过对模型残差的比较, 生动地展示了式(10)的优越性。

4.1 实验 1

本文使用 OZNN 模型(式(6))、GNN 模型(式(7))、IEZNN 模型(式(8))和 DIEZNN 模型(式(12))来求解实验 1 受线性噪声的影响,并在求解 TVQP 问题时分析每个模型的神经状态曲线和残差值。关于线性噪声的详细 TVQP 问题对应的矩阵为

$$\begin{aligned}
 H(t) &= \begin{bmatrix} \frac{\sin t}{4} + 1 + 0.1t & \frac{\cos t}{2} \\ \frac{\cos t}{2} & \frac{\cos t}{4} + 1 \end{bmatrix} \\
 p(t) &= \begin{bmatrix} \sin(3t) + 0.1t \\ \cos(3t) \end{bmatrix}, x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\
 A(t) &= \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix}, C(t) = [\sin(4t) + 0.1t, \cos(4t)] \\
 d(t) &= \cos(2t) + 0.1t, b(t) = [13.3, 13.3, 13.3, 13.3]^T \quad (14)
 \end{aligned}$$

仿真结果如图 1~图 3 所示。图 1 和图 2 分别给

出了当 $\gamma = 10$ 和 $\gamma = 15$ 时, OZNN、GNN、IEZNN 和 DIEZNN 模型求解式(12)对应的神经状态分布。从图 1 和图 2 可知,随着时间的推移,IEZNN 和 DIEZNN 的神经状态分布趋于重合,但从图 1 和图 2 的放大图例可以看出,2 个模型的神经状态分布不完全一致,存在一定的偏差。而 GNN 和 OZNN 的神经状态分布曲线完全不重合,且随着时间的推移,差异越来越大。

为了展示更明显的差异,图 3(a)和图 3(b)分别显示了当 $\gamma = 10$ 和 $\gamma = 15$ 时,4 个模型求解式(12)的残差。利用残差 $\|E(t)\|_2 = \|f(y(t), t)\|_2$ 来评估误差性能,表示为 e 。从图 3(a)和图 3(b)中可以看出, OZNN 模型和 GNN 模型的残差随时间的推移而增加,这意味着 OZNN 和 GNN 在面对时变噪声干扰的 TVQP 问题的解和理论解之间的偏差随时间的推移而增大。当 $\gamma = 15$ 时,IEZNN 模型的残差的阶数范围较大,为 $10^{-1} \sim 10^{-2}$ 。残差大意味着 IEZNN 模型

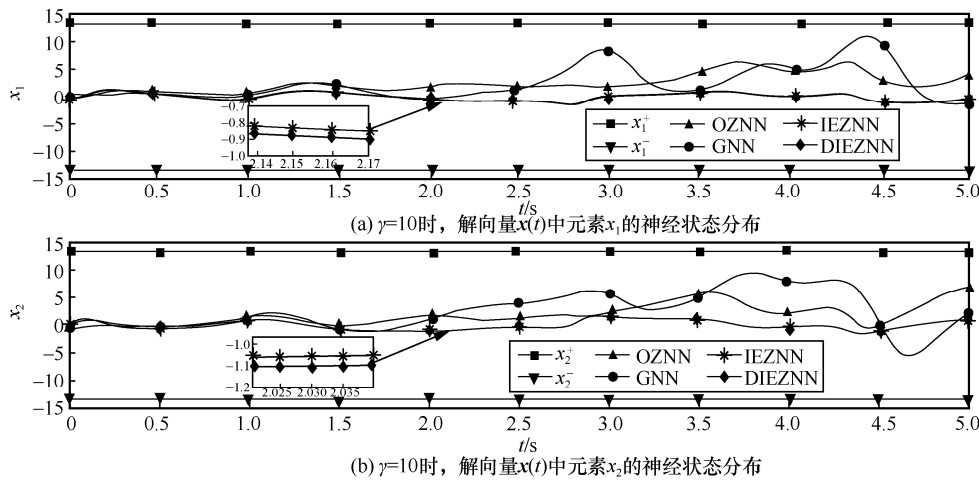


图 1 $\gamma = 10$ 时, 4 个模型求解式(12)对应的神经状态分布

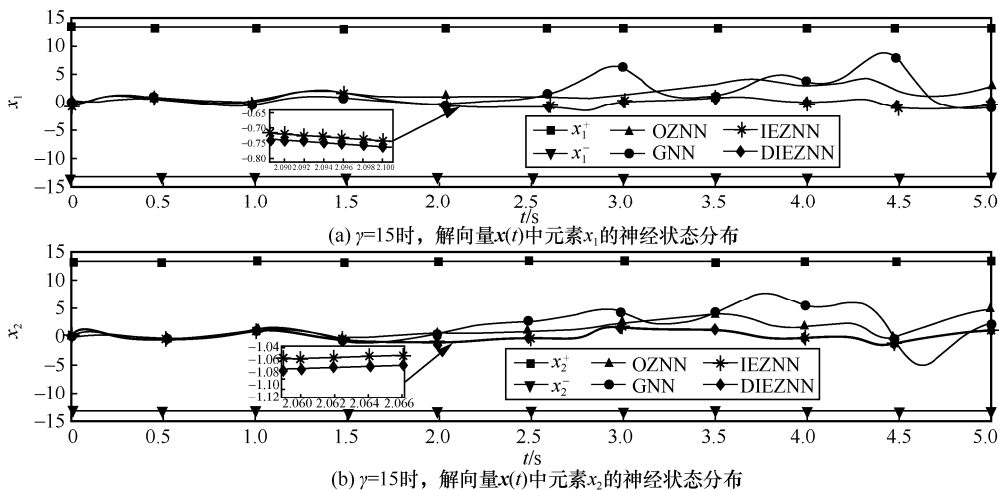


图 2 $\gamma = 15$ 时, 4 个模型求解式(12)对应的神经状态分布

的神经网络解总是滞后于理论解，这在实际应用中是不可接受的。与对比的 3 种模型不同，当 $\gamma = 10$ 、 $t = 1.8\text{ s}$ 时，DIEZNN 模型的残差减小到 $10^{-4} \sim 10^{-5}$ 。此外，当 $\gamma = 15$ 时，残差减小得更快，当 $t = 1.3\text{ s}$ 时，残差减小到 $10^{-5} \sim 10^{-6}$ 。这些结果进一步证明了 DIEZNN 模型的有效性和优越性。

4.2 实验 2

为了进一步研究 DIEZNN 模型的有效性和优越性，本文提出了第二个 TVQP 问题对应的矩阵为

$$\begin{aligned}
 H(t) &= \begin{bmatrix} \frac{\cos t}{2} + 2 + 0.1t & \frac{\sin t}{2} \\ \frac{\sin t}{2} & \frac{\cos t}{2} + 2 \end{bmatrix} \\
 p(t) &= \begin{bmatrix} \cos(3t) + 0.1t \\ \sin(3t) \end{bmatrix}, x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\
 A(t) &= \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix}, C(t) = [\cos t + 0.1t, \sin t] \\
 d(t) &= \sin(2t) + 0.1t, b(t) = [13.3, 13.3, 13.3, 13.3]^T \quad (15)
 \end{aligned}$$

仿真结果如图 4~图 6 所示。

图 4 和图 5 分别显示了当 $\gamma = 10$ 和 $\gamma = 15$ 时，OZNN、GNN、IEZNN 和 DIEZNN 模型求解式(13)对应的神经状态分布。从图 4 和图 5 中可知，IEZNN 和 DIEZNN 的神经状态分布随着时间的推移趋于重合，而 GNN 和 OZNN 的神经状态分布完全不重合，差异随着时间的推移越来越大。此外，IEZNN 和 DIEZNN 的神经状态似乎一致，但从放大的图例中看到，这 2 个模型的神经状态分布并不完全一致，且存在一定的偏差。

为了展示更明显的差异，图 6(a)和图 6(b)分别显示了 $\gamma = 10$ 和 $\gamma = 15$ 时 4 个模型求解式(13)对应的残差。从图 6 中可以看出，OZNN 模型和 GNN 模型的残差随着时间的推移而增加，这意味着 OZNN 和 GNN 在面对线性噪声干扰的 TVQP 问题的解和理论解之间的偏差随时间的推移而增大。此外，当 $\gamma = 10$ 和 $\gamma = 15$ 时，IEZNN 模型的残差为 $10^{-1} \sim 10^{-2}$ 。与对比的 3 种模型不同，当

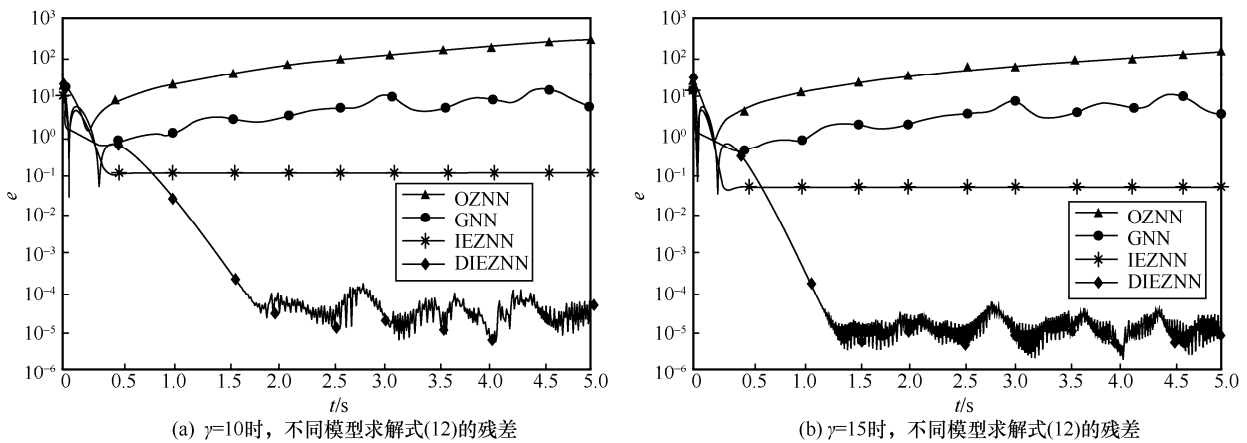


图 3 $\gamma = 10$ 和 $\gamma = 15$ 时，不同模型求解式(12)的残差

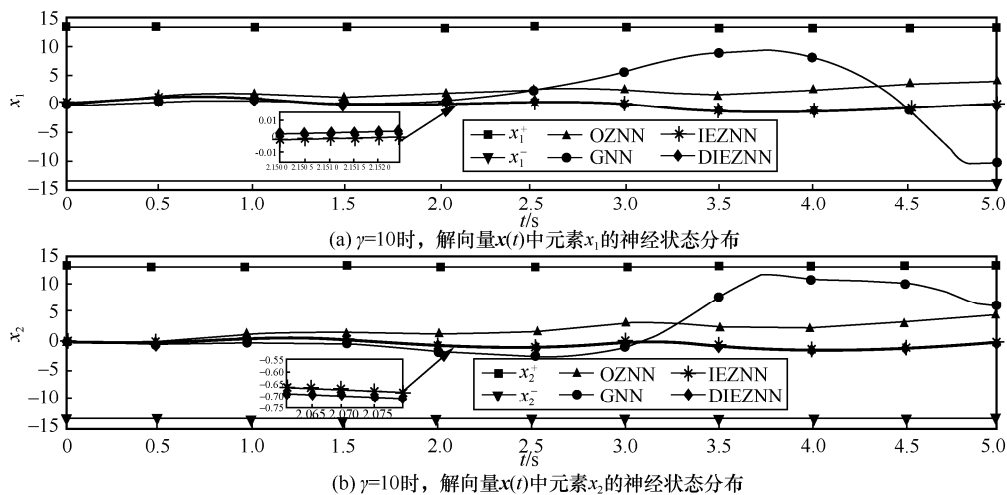


图 4 $\gamma = 10$ 时，4 个模型求解式(13)对应的的神经状态分布

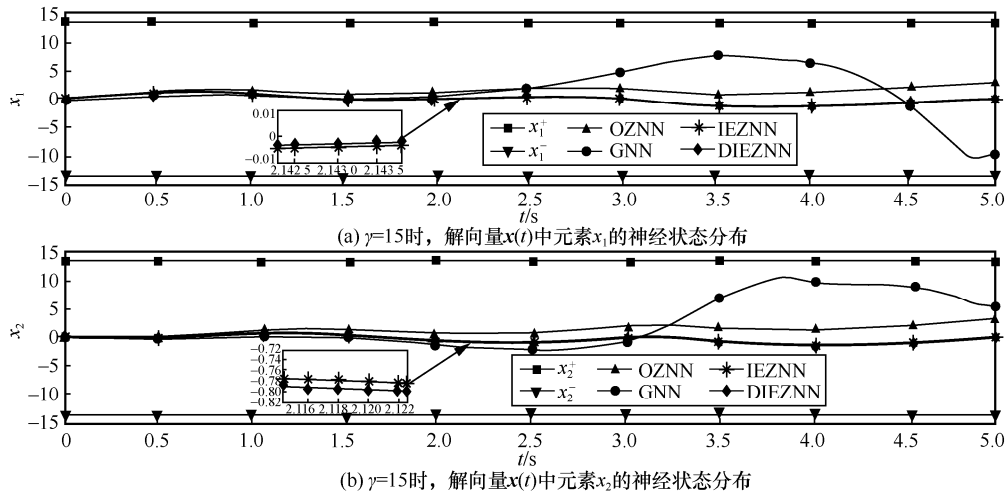


图 5 $\gamma = 15$ 时, 4 个模型求解式(13)对应的的神经状态分布

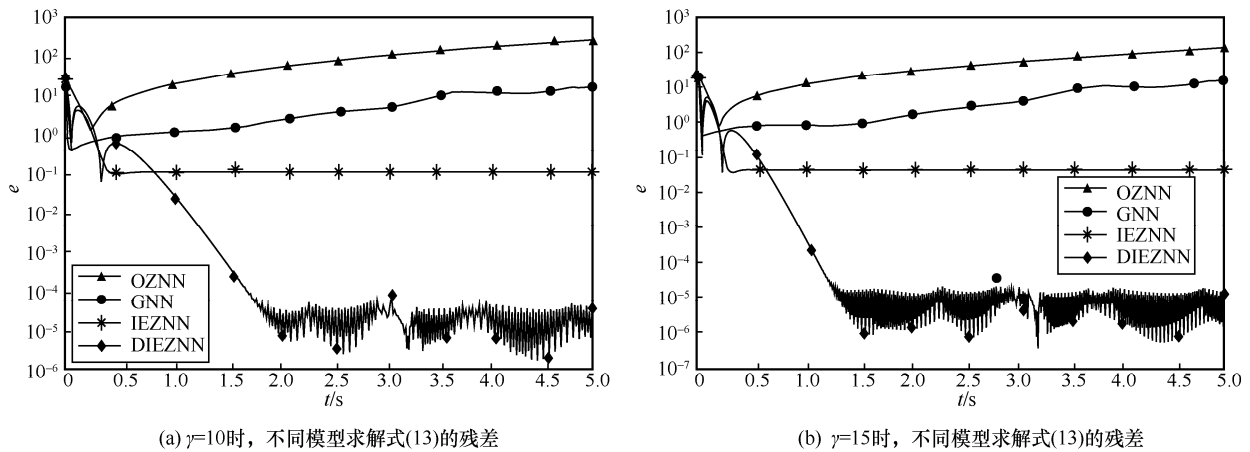


图 6 $\gamma = 10$ 和 $\gamma = 15$ 时, 不同模型求解式(13)的残差

$\gamma = 10$ 、 $t=1.9$ s 时, DIEZNN 模型的残差减小到 $10^{-4} \sim 10^{-6}$ 。此外, 当 $\gamma = 15$ 时, 残差减小得更快, 当 $t=1.3$ s 时, 残差减小到 $10^{-5} \sim 10^{-7}$ 。这些结果进一步证明了 DIEZNN 模型的有效性和优越性。

5 结束语

本文提出了 DIEZNN 模型来解决带有不等式约束的噪声干扰 TVQP 问题。与一般的数值方法 GNN、OZNN 和 IEZNN 不同, DIEZNN 模型仍然具有全局收敛性和鲁棒性。此外, 理论结果验证了该解的收敛性和鲁棒性。最后, 通过将 DIEZNN 与 GNN、OZNN、IEZNN 的实验结果进行比较, 进一步验证了 DIEZNN 模型在线性噪声约束条件下在线求解 TVQP 问题方面具有良好的有效性和优越性。

参考文献:

- [1] NAZEMI A. A capable neural network framework for solving degenerate quadratic optimization problems with an application in image fusion[J]. *Neural Processing Letters*, 2018, 47(1): 167-192.
- [2] 王建建, 何枫, 吴子轩, 等. 改进区间可接受度的证券投资组合区间二次规划模型[J]. *中国管理科学*, 2018, 26(9): 11-18.
WANG J J, HE F, WU Z X, et al. Interval quadratic programming model for portfolio selection with improved interval acceptability degree[J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2018, 26(9): 11-18.
- [3] ZHANG Y N, YI C F. Zhang neural networks and neural-dynamic method[M]. New York: Nova Science Publishers, Inc., 2011.
- [4] 张明换, 朱雅光, 姬子恒. 基于二次规划的四足机器人机轨迹优化研究[J]. *国外电子测量技术*, 2022, 41(9): 101-108.
ZHANG M H, ZHU Y G, JI Z H. Quadratic programming based body trajectory optimization of quadruped robot[J]. *Foreign Electronic Measurement Technology*, 2022, 41(9): 101-108.
- [5] FLETCHER R. A general quadratic programming algorithm[J]. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 1971, 7(1): 76-91.
- [6] ZHANG Y, WANG J. A dual neural network for convex quadratic

programming subject to linear equality and inequality constraints[J]. Physics Letters A, 2002, 298(4): 271-278.

- [7] HU X L, WANG J. Design of general projection neural networks for solving monotone linear variational inequalities and linear and quadratic optimization problems[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics Part B(Cybernetics), 2007, 37(5): 1414-1421.
- [8] LI W B, MA X, LUO J W, et al. A strictly predefined-time convergent neural solution to equality- and inequality-constrained time-variant quadratic programming[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2021, 51(7): 4028-4039.
- [9] ZHANG Y N, RUAN G Q, LI K N, et al. Robustness analysis of the Zhang neural network for online time-varying quadratic optimization[J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2010, 43(24): 245202.
- [10] ZHANG Z J, YANG S, ZHENG L N. A penalty strategy combined varying-parameter recurrent neural network for solving time-varying multi-type constrained quadratic programming problems[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2021, 32(7): 2993-3004.
- [11] BOYD S P, VANDENBERGHE L. Convex optimization[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [12] NOCEDAL J, WRIGHT S J. Numerical optimization[M]. New York: Springer New York, 1999.
- [13] HUANG X, LOU X, CUI B. A novel neural network for solving convex quadratic programming problems subject to equality and inequality constraints[J]. Neurocomputing, 2016, 214: 23-31.
- [14] JIN L, ZHANG Y N, LI S. Integration-enhanced Zhang neural network for real-time-varying matrix inversion in the presence of various kinds of noises[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2016, 27(12): 2615-2627.
- [15] ZHANG Y N, CHEN K, LI X Z, et al. Simulink modeling and comparison of Zhang neural networks and gradient neural networks for time-varying Lyapunov equation solving[C]//Proceedings of 2008 Fourth International Conference on Natural Computation. Piscataway: IEEE Press, 2008: 521-525.

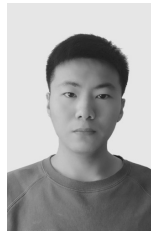
[作者简介]



李建锋（1979- ），男，湖南张家界人，博士，吉首大学教授、硕士生导师，主要研究方向为人工智能、数字图像处理、计算机视觉、医学图像处理。



刘哲宇（1996- ），男，湖南益阳人，吉首大学硕士生，主要研究方向为神经网络。



荣洋（1998- ），男，河南商丘人，吉首大学硕士生，主要研究方向为新一代人工智能、神经网络、计算机视觉等。



李展（1987- ），男，湖南郴州人，博士，斯旺西大学高级讲师、博士生导师，主要研究方向为神经网络、机器人。



廖柏林（1981- ），男，湖南常宁人，博士，吉首大学教授、硕士生导师，主要研究方向为人工智能、神经网络、非线性控制等。



屈林曦（1998- ），男，湖南张家界人，吉首大学硕士生，主要研究方向为神经网络、计算机视觉。



刘志杰（1995- ），男，河南三门峡人，吉首大学硕士生，主要研究方向为医学图像处理、计算机视觉。



林琨煌（1998- ），男，福建泉州人，吉首大学硕士生，主要研究方向为医学图像处理。

《通信学报》第十届编辑委员会

顾 问： 邬江兴 刘韵洁 方滨兴 于 全 郑建华 费爱国
何 友 尹 浩 陆建华 陆 军 姚富强 沈学民
王怀民 王金龙 崔铁军

主任委员：张 平

副主任委员：张延川 马建峰 杨 震
沈连丰 陶小峰 刘华鲁

委 员：

丁 群	王汝言	王良民	龙 军	卢建民	田 辉	田有亮
田俊峰	朱洪波	仲 红	任保全	刘西蒙	许文俊	李 伊
李少谦	李凤华	李玉峰	李建东	李陶深	杨 亮	吴 怡
吴 巍	吴启晖	吴晓平	沙学军	沈玉龙	宋令阳	宋铁成
张士兵	张云勇	张玉清	张钦宇	张朝阳	陈 巍	陈山枝
陈后金	范九伦	林金朝	欧阳缮	易东山	金 石	周一青
周武旻	周 亮	桂 冠	贾 焰	夏银水	袁东风	钱志鸿
倪国新	徐立中	郭 庆	郭 磊	郭渊博	黄 韬	黄建伟
黄梦醒	崔琪楣	梁永生	隆克平	普园媛	裴庆祺	谭晓衡

Shuguang Cui (美国) Yi Qian (美国) Shiping He (美国)

Jiangzhou Wang (英国) Wen Tong (加拿大)

收录声明

本刊对发表的文章,拥有出版电子版、网络版版权,并拥有和其他网站交换信息的权利。本刊支付的稿酬中已经包含上述费用。

Journal on Communications has the copyright to publish electronic edition, online edition of the published articles, and has the right to exchange information with other sites. The expenses have been included in the fee paid by editorial department.

道德声明

本刊发表的论文是作者独立取得的原创性研究成果,无一稿多投;论文内容不涉及国家机密;未曾以任何形式用任何文种在国内外公开发表过;论文内容不侵犯他人著作权和其他权利。若发生一稿多投、侵权、泄密等问题,论文作者将承担全部责任。

The authors of *Journal on Communications* guarantee that their submitted articles are original and contain nothing confidential. The said article is only submitted to *Journal on Communications*. The said article has not been published before and has not been submitted elsewhere for print or electronic publication consideration. The said article is no way whatever a violation or an infringement of any existing copyright or license from the third party. Otherwise, the authors of the said article shall take the blame for the violation or infringement of the related copyright and the leakage of secrets.

通信学报

Journal on Communications



发行代号：国内2-676
国外M395

2023年4月25日出版 定价：98.00元

ISSN 1000-436X



9 771000 436236 0 4>